數學傳播 49卷1期, pp. 27-42

重訪古希臘, 推理定性平面幾何學之創建與理性文明之啓蒙

項武義

引言

開宗明義, 理性文明 (civilization of rational mind) 乃是自古至今, 人類世代相承認知其所生存於其中的“宇宙”之理的所見、所思、所知、所得之總體與精要, 大體也就是現代稱之爲自然科學的範籌。例如在古文明中, 主要在於天文與幾何上的觀測實驗, 歸納與綜合, 認知其理。在中國古代和古埃及、巴比倫都獲得豐富的天文、幾何上的認知。

及至紀元前六、七世紀, 小亞細亞希臘城邦的先賢 Thales 等開始對於他們學自古埃及巴比倫的天文幾何知識作系統的邏輯推理的全面系統分析, 創建古希臘文明的推理幾何學 (deductive geometry), 全古希臘的先賢如 Pythagoras, Hippasus, Eudoxus, Archimedes 等人材輩出, 世代相承致力於此一理性文明宏偉的啟蒙與奠基的創舉, 其間歷經發現、挫折與重建, 歷盡艱辛, 百折不撓達三個多世紀, 終能浴火重生, 克竟其功是永垂不朽的豐功偉業, 光芒萬丈的里程碑, 嘉惠萬世, 如今昌盛的科學、科技的啟蒙, 奠基與典範, 實在於此!

在認知大自然的方法論上是一個果敢的大迴轉之首創, 把原先以歸納、綜合爲主之所知、所得的實驗幾何全盤改用邏輯推理來加以系統整理, 把當年的幾何知識歸結到一組簡樸精到直觀明顯的“基本性質”來逐步推理論證, 條理井然, 開創了空間本質的全面認知的清新格局與豁然開朗的氣象, 至今一直還是治學方針的典範!

如今回顧反思, 在當年也只有在幾何學上的認知, 業已充分掌握足夠的至精至簡的基本性質, 亦即是以用來系統推導其他多種各樣、多彩多姿的幾何性質和問題, 以簡御繁氣概萬千, 例如當年在天文學上, 還遠遠沒有達到上述水到渠成順理成章的境界。由此可見, 幾何學的演進, 能夠在當年進展到初屆完善的境界, 成爲永世治學的典範, 使得理性文明得以有一個好的開始 (啟蒙), 其實是有它的天時、地利與人和的條件的。而古希臘推理幾何學成爲理性文明的第一科學, 實非偶然, 令人深思、欽仰。

在對於某類事物或課題的研究或探索時, 自然而然地要先在定性層面下功夫, 才能夠進而研討其定量層面。推理幾何學的研究與建立, 當然也要先由推理定性平面幾何開其端這就是當年先賢 Thales 等在紀元前七世紀的創舉, 也就是這篇短文所要和讀者重訪之課題。

首先, 讓我們來看一下, 他們當年採用的至精至簡的基本性質 (推理論證的基石與起點) 是些什麼? 話說當年 Thales 等先賢們對於當代所知的平面幾何的定性層面作系統的邏輯分析之功夫後, 發現只要用下述兩個極爲精簡直觀的基本性質, 業已足以推論其他者, 亦即:

(i) 兩點定一直線, 一條直線 $\ell \subseteq \pi$ 把平面 π 分割成兩個半面, 亦即 $\pi \backslash \ell = \pi_\ell^+ \cup \pi_\ell^-$, 這樣互不連通的凸集 (convex set)。

(ii) S.A.S.: $\triangle$ 的疊合條件。

前者其實是平面的基本結構, 而後者則是平面的至簡, 亦即三角形, 在疊合關係上一個熟知之簡, 只要善用這樣極爲簡樸的基本性質就能系統推導其他平面各種各樣、多彩多姿的定性層面; 邏輯推理在性質層面的以簡御繁的效用, 令人驚喜, 深爲鼓舞, 這就自然使得古希臘的先賢們致力於創建推理幾何學的啟蒙, 如今回顧反思, 也就是整個理性文明的啟蒙。

回顧理性文明在這兩千多年世世代代, 承先啟後繼往開來的志士、先賢們, 這也就是他們啓蒙的發祥地, 其實它也是世世代代培訓邏輯思維, 成爲善於認識問題、解決問題的人才的理想啟蒙家園。有鑑於此, 特此爲中華兒女, 試寫這樣一個短篇, 便於自學者能有一次設身處地, 身歷其境、平實近人, 引人入勝的重訪。

§1. 連結與分割, 三角形的疊合條件; 以及巴比倫、埃及在實踐經驗幾何認知 (概述)

話說當年, 定居在小亞細亞地中海沿岸的諸多希臘城邦的青年們, 不乏富而好學之士如 Thales 等等, 嚮往古埃及與巴比倫古文明之昌盛, 紛紛前往“留學”, 蔚爲風尚, 其中以當年業已累積的天文與幾何上的認知, 讓他們耳目一新、大開眼界, 回鄉之後繼續下功夫消化、研究、反思, 這就是當年蘊育這批青壯的先賢們, 改弦更張, 更上層樓的背影。例如在直觀經驗幾何方面

(一) 連結與分割 (基本結構): 兩點定一直線 (或直線段) 將以 AB (或 $\overline{AB}$) 記號 $\{A, B\}$ 所定之直線 (或直線段), 平面 π 上一條給定直線, 把 π 分割成兩個互不連通的兩個凸集 (convex set) (平面), 即有

$$\pi \backslash \ell = \pi_\ell^+ \cup \pi_\ell^-.$$

(二) 三角形的疊合 (亦即全等) 條件: 當年研討平面上各種各樣的平面圖形, 業已認識到三角形和圓乃是精簡之存在, 再者把一個剪下來的 $\triangle$ 紙片在平面上移動或翻轉, 其形狀大小顯然不變, 若它可以和其上另一 $\triangle$ 完全疊合, 則稱之爲兩者能夠疊合 (Congruent)。它們的三邊各別等長, 三個角各別相等。(亦即我們稱之爲全等者), 而且他們在實踐中發現其實只要兩個給定 $\triangle$ 的三邊、三角之中有兩邊一夾角 (S.A.S.) 或兩角一夾邊 (A.S.A.) 對應相等, 就必然可以疊

合, 還有三邊各別對應相等也就可以疊合, 當年稱之爲 $\triangle$ 的疊合條件。

(三) **圓規與直尺和尺規作圖問題**: 如今回顧反思, 我們可以想到, 我們在初學幾何時學到的好些基本作圖法和作圖題, 現今因爲文獻在這漫長多亂的年代失傳而不得而知, 但當年業已知道不少, 而它們的作法和想法中所用到的往往就是 S.S.S. 疊合條件。(此事若稍加分析, 不難看到捨此別無他途!)

大致上, 這就是 Thales 們繼承於古文明的幾何認知的現況與基礎。

§2. 由實驗幾何邁向推理幾何, Thales 的創舉

話說當年, Thales 著手剖析上述三個疊合條件的直觀內涵, 想選用其一爲起點, 而用它來推導證明另外兩者, 所以我們在此也要設身處地, 對於它們的直觀內涵作下述剖析, 作爲重訪當年創建之壯舉的起點:

若將一個薄紙片的 $\triangle ABC$ 和另一位於平面 π' 的 $\triangle A'B'C'$, 而且它們有 S.A.S. (或 A.S.A.) 對應相等, 亦即 $\{\overline{AB}=\overline{A'B'}, \angle A=\angle A', \overline{AC}=\overline{A'C'}\}$ 或者是 $\{\overline{AB}=\overline{A'B'}, \angle A=\angle A', \angle B=\angle B'\}$, 先將前者移到 $\overline{AB}$ 和 $\overline{A'B'}$ 相疊合的位置, 如圖 1 所示,

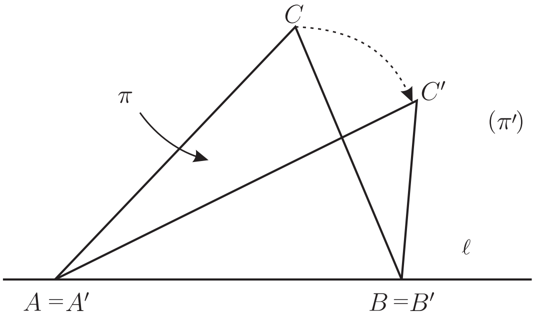

圖 1

亦即一開始就可以設 $A=A'$, $B=B'$, 而 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 可能分別位於相交於 AB 的平面 π 和 π' 之上。

由當年業已熟知常用的空間繞軸旋轉的對稱乃是保長的 (例如在車輪、製陶), 由此可見, 在 $\angle A=\angle A'$ 之所設下, 在 π 旋轉到 π' 的位置之下, 直線 AC 將和 $A'C'$ 相疊合。再者, 若 $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ 則又有 C 點將和 C' 點相疊合, 因此由兩點定一線, 可知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 完全重合。在 A.S.A. 的情形還有 $\angle B=\angle B'$, 所以 BC 和 $B'C'$ 相重, 而由相交兩線定一點得知 C 點和 C' 點也必然相重, 所以也有 $\triangle ABC$ 必然和 $\triangle A'B'C'$ 相疊合!

總之, 由上述簡潔的剖析, 可見 S.A.S. 和 A.S.A. 這兩種疊合條件的直觀內涵可以說是頗爲明顯的 (其實都和熟知常見的旋轉對稱性邏輯等價, 此乃後話)。相信, Thales 當年也有類

似的剖析與認知。

若進而再對剩下的 S.S.S. 疊合條件, 剖析其直觀內涵, 卻很難有類似的簡潔解說。(讀者不妨自行嘗試去探求之。) 此其一也, 但是往實踐的檢驗來看, 其正確性是毫無疑義的! 而且往當年的幾何知識的總體全局來審視其意義, 用場和重要性尤爲突出, 此其二也! 如今回顧反思, 就不難身歷其境地體認當年 Thales 在他邁向推理定性平面幾何此一理想、創舉之起步, 選擇要用 S.A.S. 去推理論證 S.S.S. 作爲他第一個 (首要) 的亟待突破者, 若再對於他這個切入點的妥加選擇作一剖析回顧, 這的確是一個最自然也是定性平面幾何極爲關鍵的精要所在, 所以 Thales 的成功絕非偶然, 讀者應仔細下功夫體會, 學而時思之!

長話短說。Thales 當年妥選了他邁向目標的首攻要點之後, 當然先得在認識問題上下功夫才能解決問題, 有鑒於 S.S.S. 中所唯缺者是條件中沒有一個對應角, 所以只要想方設法證得其中有一對對應角也必然相等。Thales 當年就想到需求一個可以由邊等推論角等的引理, 這就自然引領他發現下述等腰 △ 定理

定理 1(Thales): 一個等腰 $\triangle ABC$, 亦即 $\overline{AB}=\overline{AC}$, 的兩底角 (亦即 $\angle B$, $\angle C$) 必然也相等, 即 $\overline{AB}=\overline{AC}\Rightarrow \angle B=\angle C$ 。

證明: 如圖 2 所示, 作 $\angle A$ 的角平分線交其底邊於 M 點, 由所設易見 $\triangle ABM$ 和 $\triangle ACM$ 滿足 S.A.S. 的疊合條件, 即有

$$\triangle ABM \cong \triangle ACM,$$

所以有

$$\angle B=\angle C. \qquad \square$$

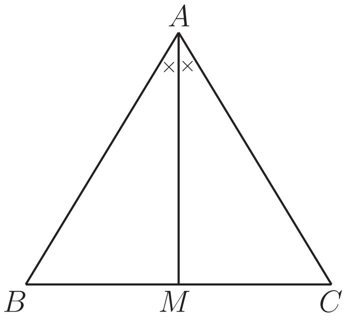

圖 2

註:

(i) 上述證明, 僅僅是直截了當地用了一次 S.A.S. 要點在於角平分線 $\overline{AM}$ 乃是 $\triangle ABC$ 的反射對稱軸。它充分展現了等腰三角形的幾何諸多特徵性質, 例如 $\overline{AM}$ 垂直平分底邊 $\overline{BC}$ 。

(ii) 歷史上, 據羅馬時代的幾何學家 Proclus 所著的幾何學史話, 上述簡簡單單的 Thales 定

理堪稱之爲推理幾何學第一個定理, 再者, 從往後的論述中, 讀者亦將看到它也是定性推理幾何學中最爲常用好用的有力引理。它的第一個重要應用就是用它來證明 S.S.S. 也是一種疊合條件。

定理 2 (S.S.S.): 若有 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的三對對應邊各別等長, 則它們疊合 (或全等), 即

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

證明: [下述論證是 Thales 的原始證法 (參看 Euclid 原本) 之稍作變更, 特此註明。] 不妨設上述 S.S.S. 的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 已有 $A' = A$, $B' = B$, 而 C, C' 則分居於 AB 之兩側 (參看圖 3)。

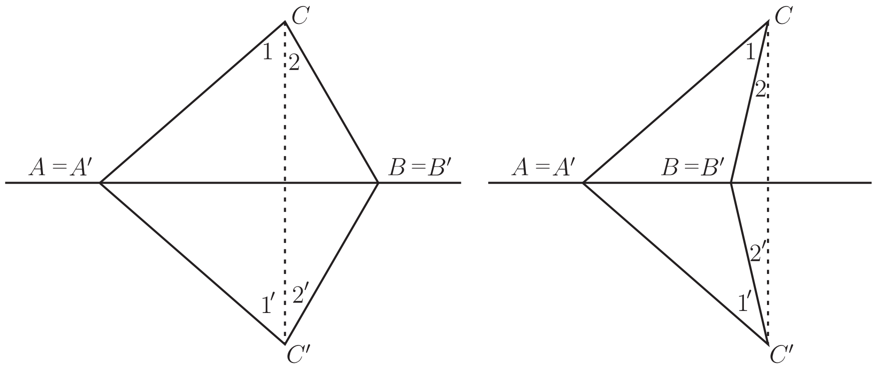

圖 3

由所設 $\triangle ACC'$ 和 $\triangle BCC'$ 都是等腰, 因此它們的兩底角 $\angle 1$ 和 $\angle 1'$; $\angle 2$ 和 $\angle 2'$ 各別相等, 當而 $\angle C$ 和 $\angle C'$ 則有兩種可能, 即

$$\begin{cases} \angle C \ = \angle 1 + \angle 2 \\ \angle C' = \angle 1' + \angle 2' \end{cases} \text{或} \begin{cases} \angle C \ = \angle 1 - \angle 2 \\ \angle C' = \angle 1' - \angle 2'. \end{cases}$$

所以即得

$$\angle 1 = \angle 1' \quad \text{和} \quad \angle 2 = \angle 2' \ \Rightarrow \ \angle C = \angle C'. \qquad \square$$

依然是簡潔明快的直接應用定理 1。

以下再以 S.A.S. 證明 A.S.A.:

定理 3(A.S.A.): 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 滿足 $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$ 和 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, 則 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

證明: 若 $\overline{AC}=\overline{A'C'}$ 則由 S.A.S. 得知, 所以不妨設 $\overline{A'C'}>\overline{AC}$, 而用反證法: 在 $\overline{A'C'}$ 之中取 C^* 點使得 $\overline{A'C^*}=\overline{AC}$ 則有 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C^*$ (S.A.S.) 由 [圖 4] 易見 $\angle ABC=\angle A'B'C^*<\angle A'B'C'$ 和所設 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ 矛盾 □

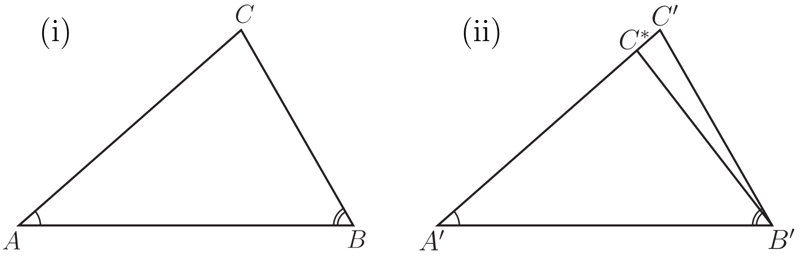

圖 4

推論: 若 $\triangle ABC$ 的兩底角相等, 則 $\triangle ABC$ 必爲等腰, 亦即定理 1 之逆定理也成立。

證明: $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACB$ 滿足 (A.S.A.), 所以 $\overline{AB}=\overline{AC}$。 □

基本尺規作圖舉例:

其一: 作一給定角的平分線。

其二: 在射線 $\overrightarrow{AB}$ 之一側作另一射線 $\overrightarrow{AC}$ 使得 $\angle BAC$ 等於一個給定角 $\angle A'$。

其三: 作一個給定線段 $\overline{AB}$ 的垂直平分線。

作法參見下列圖 5、圖 6 和圖 7, 讀者試自證之。

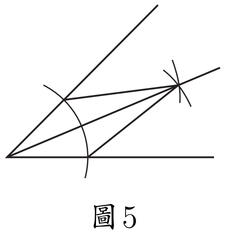

圖 5

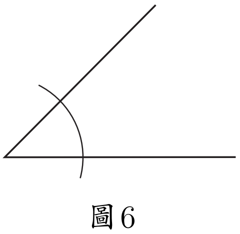

圖 6

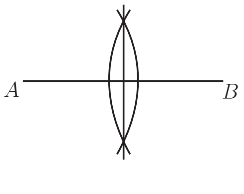

圖 7

§3. 重訪推理定性平面幾何之概要

定理 4: 設有平面中相異兩直線 ℓ_1,ℓ_2 分別和第三條直線 ℓ 相交, 若如 [圖 8]所示同位角 $\angle 1,\angle 2$ 相當, 則 ℓ_1 和 ℓ_2 不相交, 亦即

$$\ell_1\cap\ell_2=\emptyset \quad (\text{空集合})。$$

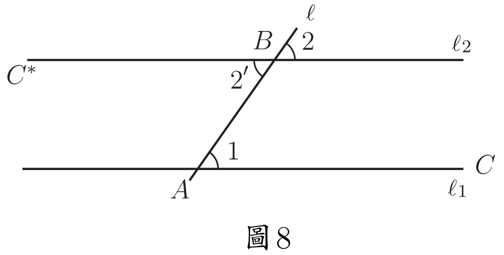

圖 8

證明: 我們將用反證法, 設 ℓ_1,ℓ_2 相交於 ℓ 之右側一點 C。在 ℓ_2 的另一半線上取 C^* 點使得

$\overline{BC^*} = \overline{AC}$。由所設易見 $\angle B = \angle 2 = \angle A$, 所以

$$\triangle ABC \cong \triangle BAC^*.$$

但因 $\angle C^*AB + \angle 1 = \angle CBA + \angle 2' = 180°$, C^*, A, C 共在 ℓ_1 上; $\ell_1 \cap \ell_2 = \{C, C^*\}$, 和兩點定一直線和 ℓ_1, ℓ_2 相異矛盾。 □

推論: $\triangle ABC$ 的外角大於內對角。例如在 B 點的外角 β 大於內對角 $\angle A$。

證明: 過 B 點作直線 ℓ_2 使得直線 ℓ_1, 即直線 AC, 和 ℓ_2 對於直線 BA 的同位角相等, 假若 β 不大於 $\angle A$, 則射線 ℓ_2^+ 不在 β 之內部而 ℓ_2^+ 和 ℓ_1 必然相交, 和定理 4 矛盾。 □

定理 5(A.A.S.): 設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 滿足 A.A.S., 亦即有 $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\angle B = \angle B'$ 和 $\angle C = \angle C'$, 則

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

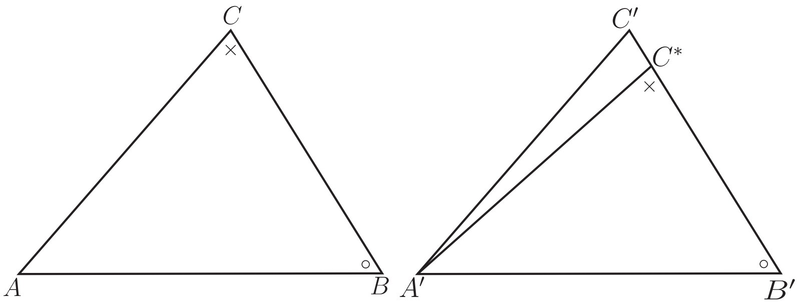

圖 9

證明: 若還有 $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, 則由 S.A.S. 即得"≅" 假若不然, 不妨設 $\overline{BC} < \overline{B'C'}$ 如 [圖 9] 所示, 在 $\overline{B'C'}$ 上取 C^* 點使得 $\overline{B'C^*} = \overline{BC}$, 則有 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C^*$, $\angle C^* = \angle C'$ 和上述推論矛盾。 □

推論 1: 大邊對大角, 大角對大邊。

證明: 如 [圖 10]所示, 在大邊 $\overline{AC}$ 上取 D 點使得 $\overline{CD} = \overline{CB} \Rightarrow \angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 > \angle A$, ($\triangle ABD$ 的外角大於內對角), 至於大角對大邊可利用反證法證明。 □

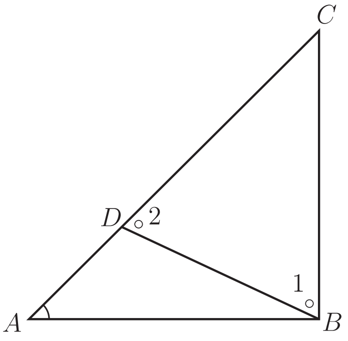

圖 10

推論 2: 三角形兩邊之和大於第三邊。

證明: 如 [圖 11]所示, 作 $\overline{BD} = \overline{BC}$, 易見 $\triangle ADC$ 中 $\angle ACD > \gamma = \angle D$, 所以由上述推論即得 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AD} > \overline{AC}$。 □

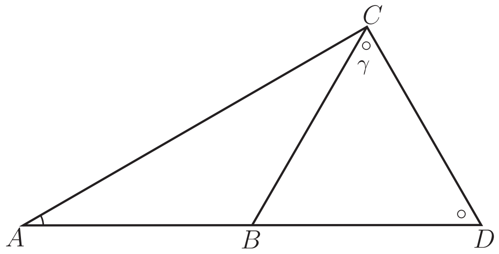

圖11

平面的反射對稱性與垂直平分線:

自古以來, 湖光山色所見的倒影, 啓示我們光的反射定律, 亦即光對於鏡面或湖面的反射, 其入射線, 反射線和平面在該點的法線 (亦即垂線) 三線共面, 而且兩者和法線的角度相等, 把它們限制到共在的平面 π 之中, 即如 [圖 12]所示 P' 是 P 的反射點, $\alpha=\alpha'$, ERP' 成一直線, $PP'\perp\ell$, 則有 $\beta=\beta'$。不難看出 $\triangle PRP'$ 是等腰, $\overline{PP'}$ 被 ℓ 所垂直平分, 而且

$$\overline{PX}+\overline{XE}\geq\overline{PR}+\overline{RE};$$

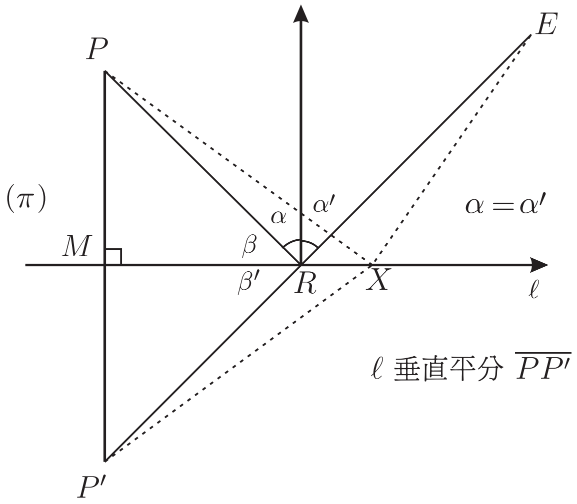

圖12

上述等號僅在 $X=R$ 時才成立。

總結上述剖析, 光的反射現象所反映的平面幾何的基本性質乃是平面 π 對於其中一條給定直線 ℓ 的反射對稱 (Reflectional symmetry) 。

定義: 對於 π 中一條給定直線 ℓ, 若 $\overline{PP'}$ 被 ℓ 所垂直平分, 則稱 $\{P,P'\}$ 對於 ℓ 成反射對稱。再者 π 到自身的映射 $\mathcal{R}_\ell$: $\pi\to\pi$ 使得 ℓ 上之點固定不動而把分居 ℓ 兩側的上述 $\{P,P'\}$ 互換, 稱之爲 π 對於 ℓ 的反射對稱。易見對於 ℓ 上的一點 R 和分居其兩側的點偶 $\{P,P'\}$,

$\triangle RPP'$ 是等腰, 把 $\mathcal{R}_\ell$ 局限在 $\triangle RPP'$ 的映射就是等腰 $\triangle RPP'$ 的對於 $\overline{RM}$ 軸對稱。

定理6: $\mathcal{R}_\ell : \pi \to \pi$ 是一個保長變換, 即

$$\overline{\mathcal{R}_\ell(P)\mathcal{R}_\ell(Q)} = \overline{PQ}$$

對於 π 中任給相異兩點 $\{P, Q\}$ 皆成立。

證明: (i) 若 P, Q 之中有一點位於 ℓ 之上, 則是定理 1 的直接推論,

(ii) 若 $\{P, Q\}$ 居於 ℓ 之異側, 則 $\overline{PQ}$ 和 ℓ 相交於一點 R, $\triangle RPP'$ 和 $\triangle RQQ'$ 都是等腰, 如 [圖 13(i)]所示, 易見 $P'RQ'$共線

$$\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RQ} = \overline{P'R} + \overline{RQ'} = \overline{P'Q'}.$$

(iii) 若 $\{P, Q\}$ 居於 ℓ 之同側, 則 $\{P, Q'\}$ 分居於 ℓ 之異側, 今 R^* 是 $\overline{PQ'}$ 和 ℓ 之交點, 如 [圖 13(ii)]所示, $\triangle R^*PP'$ 和 $\triangle R^*QQ'$依然是等腰

$\Rightarrow$ $\triangle PR^*Q$ 和 $\triangle P'R^*Q'$ 滿足 (S.A.S.)。

$\Rightarrow$ $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$。 □

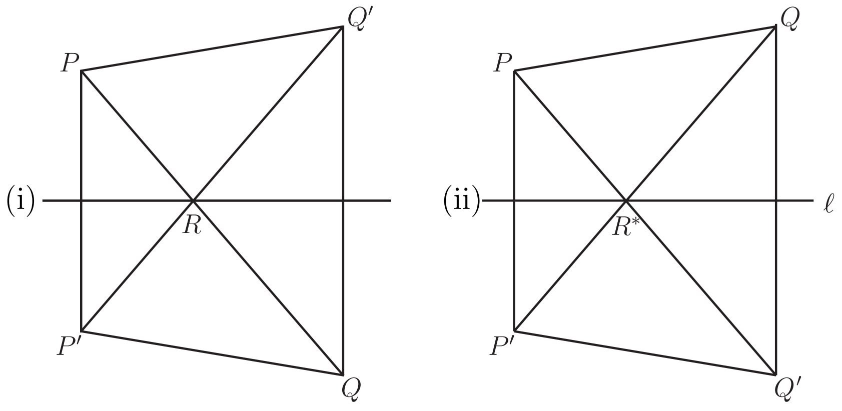

圖 13

註:

(i) 定理 2 (S.S.S.) 的一個重要推論是保長變換也必然保角, 所以 $\mathcal{R}_\ell$ 使得平面形的幾何性質完全保持, 亦即它的映像和原來者疊合 (全等)。

(ii) 等腰三角形其實就是具有反射對稱的三角形, 它是具體而微的體現平面的反射對稱性的"小精靈", 簡樸好用, 是創新反射對稱性多彩多姿的展現的好工具, 得力助手, 也是當年 Thales 得以成功之卓見。如今回顧反思, 以 Thales 他們對於平面幾何的嚴謹和洞察力, 相信業已充分體認到平面的反射對稱性之本質, 但是覺得把全空間 (或平面) 變動的映射或變換,

對於當年來說, 在想像、認識的要求過高, 所以沿用埃及、巴比倫之傳統, 依然採用上述反射對稱性在三角形的幾何上的表現來刻畫。其實, 直到現代, 依然不失其平實近人的優點; 還是一種自然的入門與起點。

(iii) 稍加剖析, 就可以認識到平面的反射對稱性是其基本性質上全局觀點與確切描述, 而 $\triangle$ 的全等條件則是它的局部化, 等腰 $\triangle$ 定理乃是它具體而微的至簡的局部化, 其好處是在具體的分析反射對稱性, 在某一種幾何問題易用好使的有力工具。這是 Thales 的創建推理定性平面幾何時得力的助手與要訣, 也是讀者要學而時用之。例如通常稱之爲作“補助線”者, 其本質乃是如何善用等腰 $\triangle$ 定理。

思考: 如何證明等腰梯形兩底角相等?

定理 7: 任給平面上的兩個全等的三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$, 皆可用至多三個妥加選取的反射對稱之組合把其一映射到另一。

證明: 設三對對應頂點 $\{A, A'\}, \{B, B'\}$ 和 $\{C, C'\}$ 沒有相重者, 令 ℓ_1 爲 $\overline{AA'}$ 的垂直平分線, 易見 $\mathcal{R}_{\ell_1}$ $(\triangle ABC)$ 之頂點 $\mathcal{R}_{\ell_1}(A) = A'$, 再者設 $\mathcal{R}_{\ell_1}(B) \neq B'$, $\mathcal{R}_{\ell_1}(C) \neq C'$, 令 ℓ_2 是 $\mathcal{R}_{\ell_1}(\overline{AB})$ 和 $\overline{A'B'}$ 之間的夾角, ℓ_2 是其角平分線, 則有

$$\mathcal{R}_{\ell_2} \circ \mathcal{R}_{\ell_1}(\triangle ABC)$$

使得 $\mathcal{R}_{\ell_2} \cdot \mathcal{R}_{\ell_1}(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ (相重)。

假如 $\mathcal{R}_{\ell_2} \cdot \mathcal{R}_{\ell_1}(C) \neq C'$, 則 $\mathcal{R}_{\ell_2} \cdot \mathcal{R}_{\ell_1}(\triangle ABC)$ 和 $\triangle A'B'C'$ 分居於 $\ell_3 = A'B'$ 之兩側, 易見

$$\mathcal{R}_{\ell_3} \circ \mathcal{R}_{\ell_2} \circ \mathcal{R}_{\ell_1}(\triangle ABC) = \triangle A'B'C'. \qquad \square$$

定理 8: 設 ℓ_1 和 ℓ_2 相交於 O 點, 則 $\mathcal{R}_{\ell_2} \cdot \mathcal{R}_{\ell_1}$ 是平面 π 上繞 O 點的一個旋轉, 其轉角是 $\lambda = \angle l_1^+, l_2^+)$ 之兩倍。

證明: P 爲 π 上一點, $P \neq O$, 設 $\angle \ell_1^+, \overrightarrow{OP}) = \theta$, 則有

$$\begin{aligned}
&\angle \overrightarrow{OP}, \mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP})) = -2\theta,\\
&\angle \ell_2^+, \mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP})) = -\lambda - \theta,\\
&\angle \mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP}), \mathcal{R}_{\ell_2} \circ \mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP})) = 2(\lambda + \theta).
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\angle\overrightarrow{OP},\mathcal{R}_{\ell_2}\cdot\mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP}))\\&=[\angle\overrightarrow{OP},\mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP})]+[\angle\mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP}),\mathcal{R}_{\ell_2}\circ\mathcal{R}_{\ell_1}(\overrightarrow{OP})]\\&=2(\lambda+\theta)-2\theta=2\lambda.\end{aligned}$$ □

註:

(i) 上述角度皆爲有向角, 讀者可自行作圖檢視之。

(ii) 在 $\lambda=\pm\frac{\pi}{2}$ 時, $\mathcal{R}_{\ell_2}\cdot\mathcal{R}_{\ell_1}$ 乃是 $\pm\pi$ 的旋轉, 它使得 $\overrightarrow{OP}$ 變爲其逆向, 通常稱之爲以 O 點爲中心的心對稱。

(iii) 易見一個四邊形 $\square ABCD$ 具有心對稱的充要條件是它的對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 互相平分, 其交點就是對稱中心。如 [圖 14]所示, 它的兩對對邊各別等長, 兩對對角也各別相等。

因爲由 (S.A.S.) 可見 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 把它分割成兩對對頂的 $\triangle$。在推理定量平面幾何中, 它就是扮演要角的“平行四邊形”。

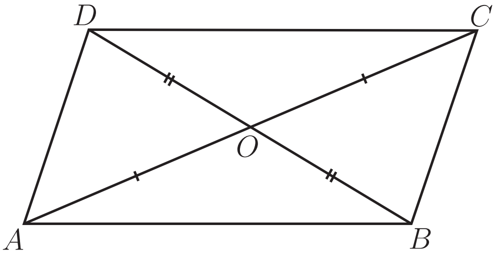

圖 14

§4. 兩個當年失之交臂的 △ 內角和定理

定理 9: 一個任給的 $\triangle ABC$, 其內角和 $\angle A+\angle B+\angle C\leq\pi$ (平角)。

定理 10: 設有一個三角形的內角和等於 π, 則所有三角形的內角和都必然也等於 π。

證明之一: 先用反證法證定理 9, 如下:

亦即由假設存在一個 $\triangle ABC$, 其內角和大於 π, 推導矛盾如下, 即設

$$\angle A+\angle B+\angle C=\pi+\varepsilon,\quad \varepsilon>0,$$

而且 $\angle A$ 是其中之最小者, 連結 A 點對邊中點 M, 延長一倍至 A^*。

如 [圖 15]所示, 即有

$$\triangle ACM\cong\triangle A^*BM\quad\text{(S.A.S.)}.$$

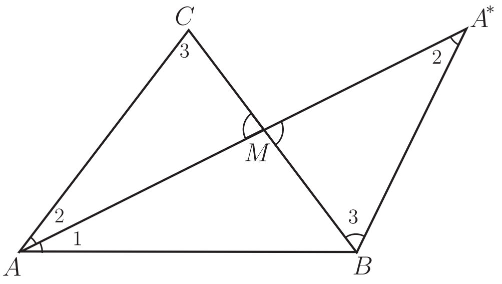

圖15

$\triangle ABA^*$ 的內角和 $= \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle B = \pi + \varepsilon$。

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle A \quad (\text{原給 } \triangle ABC \text{ 之最小內角}),$$

所以 $\triangle ABA^*$ 最小內角至多等於 $\angle A$ 之半。

如此逐步構造, 即得下一個 $\triangle$ 的最小內角至多只有前者之半。因此只要作足夠多次, 即得一個其最小內角小於 ε, 而內角和依然是 $(\pi+\varepsilon)$, 亦即其另外兩個內角 α, β 之和大於 π。設 β 之外角為 δ, 則 $\delta+\beta=\pi<\alpha+\beta$, 因此 $\delta<\alpha$, 此事顯然和定理 4 之推論: 外角大於內對角矛盾。所以這種 $\triangle$ 根本不可能存在, 亦即

$$\triangle \text{ 內角和 } \le \pi.$$

證明之二: 設存在有 $\triangle ABC$, 其內角和等於 $\pi, \angle C$ 是其最大內角。$\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 之垂線, 如 [圖 16] 所示

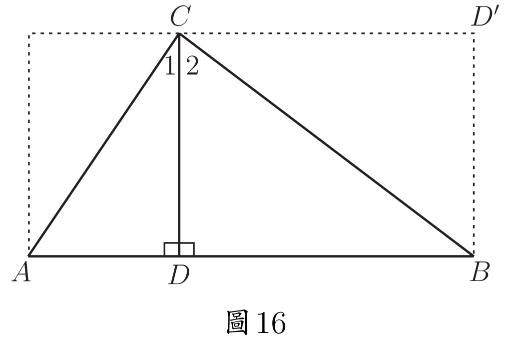

圖16

即有

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(\angle A + \angle 1 + \pi/2)}_{\le \pi} + \underbrace{(\pi/2 + \angle 2 + \angle B)}_{\le \pi} = \underbrace{\angle A + \angle C + \angle B + \pi = 2\pi}_{= 2\pi}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 直角 $\triangle CDA$ 和 $\triangle CDB$ 的內角和也都必須等於 π。任取其一, 即可得如 [圖 16]中所示

之矩形 $\square CDBD'$, 此矩形是由 $\triangle CDB$ 的另一個全等形堆疊而成, 因此對邊相等且四個內角均爲直角。現在我們要進而證明任何直角三角形的內角和恆等於 π 。

(i) 用上述矩形可以像砌牆一樣堆砌而得足夠大的矩形, 把一個任給的直角 $\triangle$, 包含於其左下角。如 [圖 17]所示, $\triangle ABC \subseteq CDEF$ 。

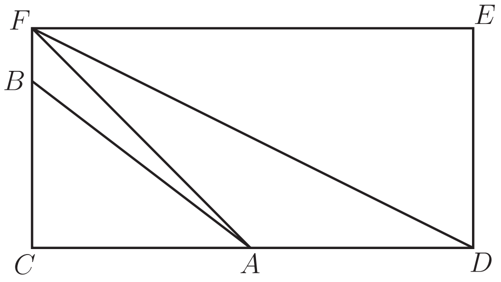

圖 17

因爲 $CDEF$ 是矩形, 易見

$$\triangle CDF \text{ 之內角和 } = \pi,$$

$$\triangle CAF \text{ 之內角和} + \triangle AFD \text{ 之內角和 } = 2\pi.$$

(定理 9) $\Rightarrow$

$$\triangle CAF \text{ 之內角和 } = \pi,$$

$$\triangle CAB \text{ 之內角和 } + \triangle AFB \text{ 之內角和 } = 2\pi.$$

(定理 9) $\Rightarrow$

$$\triangle CAB \text{ 之內角和 } = \pi.$$

由此易見任給三角形的內角和恆等於 π, 因爲如 [圖 16]所示, 它可以分割成兩個直角三角形, 兩者的內角和都等於 π, 所以它的內角和乃是

$$2\pi - \pi = \pi. \qquad \square$$

注: (i) 上述兩個定理的證明其實相當簡樸明瞭。

可惜當年古希臘的先賢們全然沒能認識到有此可能, 若將上述論證稍加剖析, 證一的要點在於逐步構造保持內角和而將其最小內角逐步至少減半者, 其構造僅僅是 S.A.S. 的運用。而證二所用的逐步歸結到矩形和簡簡單單的分割, 請注意, 每步定理 9 多扮演要角。問簡樸精到的問題才是認識問題、解決問題的好的開始, 乃是首要讀者宜習而時思之。

(ii) 從幾何學 (即空間本質的認識論) 的全局來剖析, 上述兩個定理之是否能及早發現乃是至關重要之點, 因爲在進而研討定量平面幾何學時, 是否有矩形 (亦即是否有其內角和爲 π 的三角形) 是面積公式之所基!

如今回顧反思, 也就是由於這兩個基本重要的 △ 內角和定理未能在當年發現 (主要是根本沒想到有此一問!), 所以當年的推理平面幾何學在由定性層面轉進到定量層面時, 可以說出於無奈, 引進了第五公設 (亦即通稱之爲平行公理者), 它其實等價於 △ 內角和恆等於 π, 因爲沒有它就找不到證明定量平面幾何中所有重要的公式與定理, 如當年實驗歸納而認識到矩形面積等於長×寬, △ 面積等於 $\frac{1}{2}$ 底×高, 勾股弦公式, 相似 △ 定理等等。

在此不妨設想假如業已發現定理 9 和 10, 則在問定量平面幾何基礎論的轉折點時, 自然就順理成章地認識到擺在眼面前的是有兩種定量平面幾何, 亦即 △ 內角和恆等於 π 和恆小於 π 者, 前者有習以爲常的矩形, 而且可以用平行分割來研究其面積公式; 後者則根本沒有矩形。總之, 兩者之間, 顯然以前者比較容易研究, 貼近我們習以爲常的直觀。而且, 現在業已真相大白, 若要研究後者, 也得先行深刻認知前者, 才有可能, 因爲後者乃是現在稱之爲非歐幾何 (Non-Euclidean Geometry), 它相當於矩形者的面積公式不是長×寬, 而是超越函數, 此乃後話。

(iii) 歷史的回顧: 其實, 對於這種引進平行公理的處理方式, 自古希臘的先賢們一直到十八世紀世代相承的幾何學家都對此感到不自在, 有的試著把它用其他比較「直觀」的「公設」來替代之, 有的則致力於想方設法根本把它用其他基本性質加以論證, 這樣不就可以不必有此一設? 但是兩千年來, 屢試屢敗, 此事一直到十九世紀初葉非歐幾何的發現, 才真相大白。而上述兩個定理之發現, 其實就是其備奏序曲, 由此可見困惑幾何學界達兩千多年之久的「平行公理」之謎思, 其實就是因爲這兩個定理未能及早發現, 而非歐幾何學者就是那個 △ 內角和恆小於 π 的另一選項是也 (參見張海潮, ⟨⟨非歐幾何講稿⟩⟩, 數學傳播 2015 年 9 月 39 卷 3 期)。

§5. 推理定性平面幾何在理性文明與數學教育中扮演的角色

在人類理性文明的演進歷程上, 推理定性平面幾何學是第一個達成在認知方法論上的重要轉進, 系統運用邏輯推理, 由以歸納綜合爲主的求知方法, 改弦更張, 更上層樓, 以演繹法, 全局觀點, 不但把原先之所得, 加以系統的以簡御繁的整理, 並且可以繼續前進, 以推理論證探索新知氣概萬千, 例如上述定理 9 和 10 就是這方面一個特別突出的實例並能引導我們順理成章地發現 ⟨非歐幾何學⟩。

由此可見, 它因爲題材簡樸富有直觀, 而且簡簡單單的基本結構: 連結與分割的全等 △ 之條件 S.A.S. 業已組成一組是以*以簡御繁統御全局*之「簡」, 它是理性文明認知大自然第一個達到初步成熟條理井然的學科, 當之無愧是世世代代治學的典範, 堪稱第一科學, 理性文明的*啓蒙者*! 其實, 它也是世世代代之有智而有志致力於理性文明的志士先賢們得以啟蒙, 體認科學方法, 探索求知的最自然又最爲平實近人, 引人入勝的家園。

時至近代, 理性文明蓬勃開展, 科技日新月異的時代, 遠在兩千年古希臘的先賢草創的理性文明的啟蒙者又將扮演怎麼樣的角色呢?

有鑒於現況, 資訊迅猛發展過度商業化, 難免好壞真假混雜, 其中究竟有多少是具有知識和有用的含金量, 難言也! 由此可見, 資訊之是否對你有用、有益? 其底線當然還是要靠你是否有辨真僞, 思考分析的能力去整理、消化與獨立思考的判斷力。總之, 資訊絕非就是有用的知識 (Informations themselves are not knowledges), 其理甚明, 但是目前可能有很多人往往把此兩者混爲一談。

再者, 由於手機的高度普遍, 大部份青少年在他們的成長年代業已人手一手機, 但是他們在辨別真僞、是非的基本思考分析上的能力, 卻尚無培養, 實在是遠遠不足以應付這樣資訊泛濫, 良莠混雜, 真假莫辨的 "資訊叢林", 此事著實令人擔憂, 亟待補救! 由此可見, 一個現代青少年所要面對的大環境, 在認識問題, 解決問題的能力之培訓, 刻不容緩。而此事的基本功則在於邏輯思維與綜合分析。再者近年來大家都體認到 "創新人才" 的核心重要性, 其實, 創新人才所必須具備者不就是善於認識問題, 善於解決問題嗎? 由此可見, 邏輯思維和綜合分析的培養與教學實乃中學教育特別是數學教育的首要, 尤其在資優生的教育上, 乃是成敗之所基。總之, 如何做好這方面的培養, 教育乃是當前迫切的問題和必須妥善達成的重擔。

其中一個要點就是要把簡易邏輯教得平實近人, 簡樸精到, 而且能引人入勝, 從實例的運用中體會其用法與用場。其實稍加剖析, 簡易邏輯的基本概念, 法則和原理, 採用 G. Boole 的卓見, 亦即把性質之間的蘊含 (implication) 關係 "$\alpha \Rightarrow \beta$" 轉換成以它們爲 "特徵性質" 的元素所構成的集合之間的包含關係來描述, 亦即

若以 A 表示以 α 爲其特徵性質之集合, 以 B 表示以 β 爲其特徵性質之集合, 則 $\alpha \Rightarrow \beta$ 的意義就是 $A \subset B$。

因此就可以簡單明瞭, 平實近人的解說清楚, 由此可見, 邏輯的教學眞正要點在於使得學者不但學會用, 而且能體會善用邏輯推理所能展現的威力和用場之廣闊, 達到理在用中方知妙。此事非易, 其要訣和考究在於所採用的實例要既簡樸精到, 富有直觀, 而其內在本質又多彩多姿美妙無方, 使得邏輯推理能充分展現其妙用與威力。這種實例十分難得寶貴, 自古到今, 這本小冊子所重訪的定性平面幾何可以說是衆所共識的最佳選擇, 獨領風騷!

一方面平面幾何的直觀是一目瞭然的, 而我們前面所討論這一系列定性平面幾何的性質一來簡樸精到, 二來它們在往後進而研究定量平面幾何, 以至於空間幾何學多是有用, 要用之精簡本質, 而所有這些多彩多姿的基本性質又通通可以由連結與分割和 S.A.S. 這兩個至精至簡逐步用邏輯推理論證之。邏輯推理以簡御繁的威力, 令人神往, 引人入勝, 這也就是爲什麼 "推理定性平面幾何" 不但是理性文明的啟蒙者, 它也是世世代代之學子們啓發心志培訓邏輯思維的一個理想的實例與腦力運動場, 再者, 它其實也很可以自學而重訪之的。

這就是試寫這本小冊子的本意。

結語: 幾何學所研討的是空間的本質, 也就是對於空間的各種各樣的性質和表像, 由表及裡探求其精簡而且基本者, 亦即由繁精簡, 以期能夠達成至精又至簡的精簡合一的境界, 然後再用這些

精簡合一的基本性質回頭來以簡御繁, 氣象萬千。

再者, 在研究的層次上, 自然要先行從定性層面做起, 然後再更上層樓, 作定量層面的研討。由此可見這本小冊所重訪者, 也就是整個幾何學自然的起步, 所用來以簡御繁的至精至簡僅有兩點, 即連結與分割與 S.A.S., 前者是基本結構之表述, 而後者其實質就是平面對於其中任給直線 $\ell \subset \pi$ 的反射對稱性, 乃是定性幾何中推理論證的主力軍。而 Thales 首先發現的定理 1 其實乃具有反射對稱的平面圖形的至簡者, 具體而微的表現了反射對稱性, 實乃運用反射對稱性小而精的理想工具, 讀者宜習而時思之!

在幾何學的自然演進的歷程中, 定性平面幾何的認知, 乃是接著邁向定量平面幾何之所基, 在這個轉進之起點上, 定理 9 和 10 之是否業已發現是大異其趣的, 假若當年業已發現, 則在三角形內角和上所面臨的乃是“恆等於 π”或者“恆小於 π”這樣兩種選項, 前者是有早已習以爲常的矩形, 而後者則根本沒有矩形, 所以自然選用前者先行研究, 而後者則留待以後再去一探其究竟。可惜當年古希臘的先賢們未能想到會有這種定理, 只有出於無奈, 採用引進和前者邏輯等價的第五公設, 此事困擾幾何學界達兩千多年, 一直到十九世紀初發現“非歐幾何” (亦即“恆小於 π”者) 之發現才真相大白, 此乃後話。

—本文作者任教美國加州大學柏克萊分校數學系—